

Exercices – Séquence n° 10 – SUITES (III) :

Compléments sur les suites

Contenu	- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge. - Image d'une suite convergente par une fonction continue.
Capacités	- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. - Raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite. - Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite. - Par une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. - Exemples d'algorithme : recherche de seuils, recherche de valeurs approchées de nombres irrationnels.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Suites monotones et convergence

Exercice 1 [Ra-Ca-Co]

Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $s_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.

- Démontrer que la suite (s_n) est décroissante.
- Démontrer que $\frac{3}{2}$ est un majorant de la suite (s_n) .
- Déterminer un minorant de la suite (s_n) . Justifier.
- Que peut-on déduire des questions 1) et 3) sur la suite (s_n) ?
- Déterminer la limite de la suite (s_n) .

Exercice 2 [Ra]

Chacune des suites, à gauche, remplit l'une des conditions, à droite. Relier chaque suite à la condition qu'elle remplit.

– Suites –

– Conditions –

$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	■	■	La suite est majorée et non minorée
$(-n)_{n \in \mathbb{N}}$	■	■	La suite est bornée et divergente
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	■	■	La suite converge vers 0 et n'est pas monotone
$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$	■	■	La suite est bornée par 0 et 2, non constante et converge vers 1
$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$	■	■	La suite est non majorée et ne tend pas vers $+\infty$
$((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$	■	■	La suite est strictement positive et converge vers 0

Exercice 3 [Ra-Co]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- **Affirmation 1 :** si une suite est strictement croissante, alors elle a pour limite $+\infty$.
- **Affirmation 2 :** si une suite est strictement décroissante, alors elle a pour limite $-\infty$.
- **Affirmation 3 :** si une suite est bornée, alors elle converge.
- **Affirmation 4 :** si une suite est croissante et majorée par 5, alors elle converge vers 5.
- **Affirmation 5 :** si une suite est non majorée, alors elle a pour limite $+\infty$.
- **Affirmation 6 :** si une suite est décroissante et convergente vers 0, alors elle est minorée par 0.

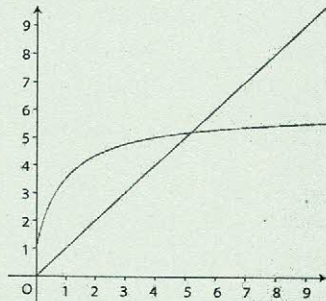
Fonctions continues et suites convergentes

Exercice 4 [Re-Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = 6 - \frac{5}{1+x}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I et dresser son tableau de variations.
- 2) Vérifier que pour tout réel x de I , $f(x) \in I$.
- 3) Calculer u_1 .
- 4) Sans calculs, représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
On utilisera les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
On laissera apparents les tracés en pointillés.
- 5) Conjecturer sur le comportement (sens de variation, bornes, convergence, limite) de cette suite (u_n) .
- 6) Démontrer que pour tout entier naturel n , $5 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 7) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 8) Si on changeait le premier terme u_0 , observerait-on le même comportement de la suite (u_n) ? Ne pas démontrer.
- 9) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - a. Calculer S_0, S_1 et S_2 .
 - b. Démontrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.



Exercice 5 [Re-Ra-Ca-Co]**Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x + 2e^x}{1 + e^x}$.

- 1) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 3]$, $e^{-x} - x + 3 > 0$.
- 2) Justifier le résultat ci-dessous obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel donnant la dérivée de f .

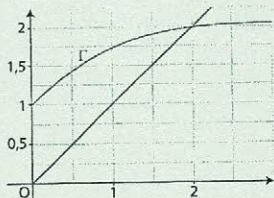
$$f'(x) = \frac{(x-3) \cdot e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

- 3) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x)$ a le même signe que $e^{-x} - x + 3$.
- 4) En déduire le sens de variation de f sur $[0; 3]$ et vérifier que pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \in [0; 3]$.
- 5) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

- 6) Sans calculs, représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
On utilisera les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
On laissera apparents les tracés en pointillés.
- 7) Émettre des conjectures sur le comportement (sens de variation, bornes, convergence, limite) de cette suite (v_n) .
- 8) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 2$.
- 9) En déduire que la suite (v_n) est convergente et déduire de la question 5) sa limite.

**Exercice 6** [Ch-Mo-Ra-Co]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

- 1) Compléter les lignes 5, 6 et 7 de la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie la LISTE des termes des rangs 0 à n de la suite (u_n) où n est la valeur entrée en argument de cette fonction.
- 2) Dans la console d'exécution Python, on saisit `U(10)`.

Voici ce qui est affiché :

```
def U(n):
    1 from math import *
    2
    3 U=0.5
    4 L=[U]
    5 for i in range( ):
    6
    7
    8 return L
```

```
def U(n):
    >>> U(10)
    [0.5, 0.3333333333, 0.25, 0.2, 0.1666666667, 0.1428571429,
    0.125, 0.1111111111, 0.1, 0.090909091, 0.0833333333]
    >>> |
```

Prouver que la suite (u_n) converge. (Deux méthodes possibles).

- 3) Étant donné un entier naturel p , on s'intéresse dans cette question au plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n < 10^{-p}$.
 - a. Justifier l'existence d'un tel entier n_0 .
 - b. Écrire un algorithme en langage naturel ou un programme en langage Python qui détermine cet entier naturel n_0 , p étant l'entier naturel saisi par l'utilisateur.

Exercice 7 [Ch-Mo-Ra-Co] D'après Bac Centres étrangers, juin 2025

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
 Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que, dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en milliers d'individus.

- 1) Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.
- 2) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- 3) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 4) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que, dans ce milieu, l'évolution de la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n est modélisée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -0,05(v_n - 11)^2 + 6,05$.

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en milliers d'individus.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
- 2) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite L .
- 3) a. Déterminer la valeur de L en justifiant.
 b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

- 1) En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
- 2) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
- 3) Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
- 4) On considère le programme en langage Python ci-contre.
 - a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
 - b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

Exercice 8 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

- 1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) En déduire que pour tout x appartenant à $[\frac{4}{3}; 2]$, $f(x)$ appartient à $[\frac{4}{3}; 2]$.
- 3) Démontrer que pour tout réel x , $f(x) \geq x$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 4) Étude du cas $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge.
 - c. Prouver que la limite de la suite (u_n) est égale à 2.

- 5) Étude du cas particulier $u_0 = 3$.

On admet que, dans ce cas, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction « seuil » suivante écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 100$.

```
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while ...
        u = ...
        n = ...
    return n
```

- 6) Étude du cas $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Pour réviser**Exercice 9** [Ra-Ca-Co]

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette solution.

Partie A : étude d'une première fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

- 1) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$.
- 2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.
- 5) En déduire le signe de f sur $[0; \alpha]$.

Partie B : construction d'une suite

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

- 1) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = x$ pour $x \neq 0$.
- 2) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = -\frac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
- 3) En déduire que la fonction g est croissante sur $[0; \alpha]$.
- 4) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers α .
 - c. À l'aide de la calculatrice et de la suite (u_n) , conjecturer la valeur arrondie de α à 10^{-6} près.

Pour aller plus loin

Exercice 10 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = \frac{2w_n}{\sqrt{w_n^2 + 1}}$.
Démontrer que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

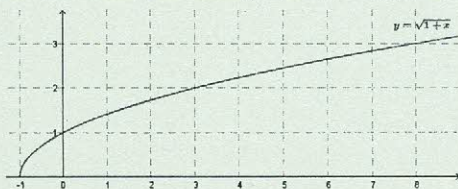
Exercice 11 [Re-Ca-Co-Ra-Mo]**Partie A : Étude préliminaire d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$.

- 1) Étudier les variations de f sur $[-1; +\infty[$.
- 2) En déduire le signe de f sur $[-1; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une première suite

Est représentée, dans le repère suivant, la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 3) Représenter graphiquement, dans le repère ci-dessus, la droite d'équation $y = x$ puis les quatre premiers termes de la suite (u_n) . Que peut-on conjecturer ?
- 4) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} < 2$.
- 5) En déduire la convergence de la suite (u_n) puis déterminer sa limite.

Partie C : Étude d'une deuxième suite

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

- 6) Dans le repère précédent, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (v_n) . Que peut-on conjecturer ?
- 7) Montrer que, pour tout entier naturel n , $1 < v_{n+1} < v_n$.
- 8) En déduire que la suite (v_n) converge.
- 9) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

Définition : Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites **adjacentes** lorsque :

■ (a_n) est croissante

■ (b_n) est décroissante

■ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$

- 10) Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- 11) En déduire la limite de la suite (v_n) .

Partie D : Encadrement du nombre d'or

En notant $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \varphi \leq v_n$.

- 12) Compléter les lignes 6, 7 et 8 de la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie un encadrement de φ d'au plus 10^{-p} où p est un entier naturel saisi en argument de cette fonction.
- 13) Préciser ce que renvoie ce programme si on saisit :
 - a. `nbor(3)`
 - b. `nbor(8)`

```

1 from math import *
2 def nbor(p):
3     u=0
4     v=8
5     n=0
6     while :
7
8
9         n=n+1
10    return n,u,v

```

Exercice 12 [Mo-Ra-Ca-Co] Méthode de Héron : recherche algorithmique de valeur approchée d'une racine carrée**Principe géométrique**

Chez les mathématiciens grecs, extraire la racine carrée de a revient à trouver un carré dont l'aire soit a . En prenant un rectangle de côté arbitraire x et de même aire a , il est nécessaire que l'autre côté ait pour longueur $\frac{a}{x}$.

Pour le rendre « moins rectangle », il suffit de considérer un nouveau rectangle dont la longueur est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents soit $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right)$ et dont l'aire reste a .

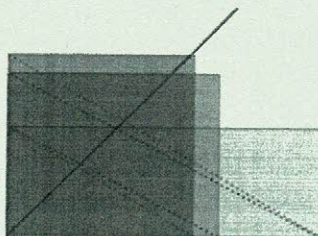
En répétant indéfiniment le processus, le rectangle se transforme petit à petit en un carré de même aire a et dont le côté se rapproche de $\sqrt{a}$.

On peut se convaincre facilement du bien-fondé de cette affirmation :

α. Si x_1 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{a}$, $\frac{a}{x_1}$ est alors une valeur approchée par défaut de $\sqrt{a}$, et inversement.

β. On choisit alors leur moyenne arithmétique x_2 comme nouvelle valeur approchée de $\sqrt{a}$.

γ. En calculant $\frac{a}{x_2}$ puis x_3 puis... on obtient des approximations de plus en plus fines de $\sqrt{a}$.



Les rectangles ont même aire. Chaque rectangle a pour longueur la moyenne des dimensions du rectangle précédent.

Partie A - Étude d'une suite

On considère la fonction f définie sur $I = [\sqrt{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

- Étudier les variations de f sur I .
- En déduire que pour tout réel x de I , $f(x) \in I$.
- On considère alors la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = f(x_n)$.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n , $\sqrt{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$.
 - En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.
 - On souhaite utiliser la fonction « heron » écrite en langage Python ci-dessous pour calculer x_{100} .
Compléter ce programme.
 - Saisir ce programme sur une calculatrice et calculer x_{100} .
 - Compléter le programme suivant écrit en langage Python dans lequel la fonction « heronbis » permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à p décimales.

```
def heron():
    x = ...
    for i in range(...):
        x = ...
    return ...
```

```
def heronbis(p):
    n = ...
    x = ...
    while ...:
        n = ...
        x = ...
    return ...
```

Partie B - Autre approche

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

- Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$.
- En déduire la convergence de la suite (u_n) .
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .
- Écrire une fonction Python qui renvoie la LISTE des termes de rang 0 à p de la suite (u_n) où p est un entier naturel donné en argument de cette fonction.

Quel peut être l'intérêt d'un tel programme dans ce contexte ?